



حل تمرین خود را تا مهلت مقرر به آدرس aa86.course@gmail.com ارسال کنید.
توجه: آزمون میان‌ترم دو شنبه ۸۷/۹/۱۱ برگزار می‌شود.

۱) می‌خواهیم شاره‌ی بیشینه را در شبکه‌ای با این ویژگی‌ها پیدا کنیم. فرض کنید که مجموعه‌ی رأس‌های این شبکه $V = S \cup T \cup \{s, t\}$ است. یال‌ها فقط بین رأس‌ها دو مجموعه‌ی $\{s\} \cup T$ و $\{t\} \cup S$ (در دو جهت) هستند و ظرفیت آن‌ها دل‌خواه است. هم‌چنین فرض کنید که $|V| = n$ و $|S| = \sqrt{n}$.

الف. نشان دهید که تعداد یال‌های هر مسیر ساده بین s و t از $O(\sqrt{n})$ است.

ب. اگر از الگوریتم Push-Relabel برای به‌دست آوردن شاره‌ی بیشینه استفاده کنیم، اثبات کنید که حداکثر تعداد relabel‌ها برای هر رأس $O(\sqrt{n})$ است.

ج. حداکثر تعداد saturating push و non-saturating push را نیز در این حالت به‌دست آورید. جواب خود را توجیه کنید.

۲) الف- در مسئله‌ی شبکه‌ی شاره، یال e را «حساس افزایشی» (upward critical) می‌گوییم اگر افزایش ظرفیت e ، شاره‌ی بیشینه را افزایش دهد. آیا هر شبکه‌ی شاره یک یال حساس افزایشی دارد؟ یک الگوریتم ارائه دهید تا همه‌ی یال‌های حساس افزایشی را مشخص کند. پیچیدگی الگوریتم شما باید بسیار بهتر از حل مکرر مسئله‌ی شبکه‌ی شاره باشد.

ب- یال e را «حساس کاهش‌ی» (downward critical) می‌گوییم اگر کاهش ظرفیت e ، شاره‌ی بیشینه را کاهش دهد. آیا مجموعه‌ی یال‌های حساس افزایشی با مجموعه‌ی یال‌های حساس کاهش‌ی برابر است؟ در صورت جواب منفی، یک الگوریتم ارائه دهید تا همه‌ی یال‌های حساس کاهش‌ی را مشخص کند. الگوریتم خود را تحلیل کنید.

۳) یک گراف بدون جهت $G = (V, E)$ یک شبکه‌ی کامپیوتری پهناور را نشان می‌دهد. وزن یال‌ها بین 0 و 1 و برابر احتمال خرابی آن خط است. $S \subset E$ را افراز یالی G می‌گوییم اگر $G' = (V, E - S)$ ناهم‌بند باشد. در آن صورت S نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی یال‌هایی است که در صورت خرابی همه‌ی آن‌ها ارتباط حداقل دو گره از شبکه قطع می‌شود.

الف) اگر $f(n)$ بیش‌ترین تعداد افرازهای یالی یک شبکه با n گره (رأس) باشد، آیا یک ثابت $c > 0$ وجود دارد که $f(n) = O(n^c)$ ؟

ب) الگوریتمی از $O(n^4)$ برای پیدا کردن یک افراز با بیش‌ترین احتمال در G ارائه دهید. احتمال یک افراز حاصل ضرب وزن یال‌های آن است.

۴) مسایل ۴.۷-۲۶، ۴.۸-۲۶، ۵.۲-۲۶ و ۳-۲۶ از کتاب را حل کنید.